UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS SERVOSISTEMAS TIPOS 1 Y 2

ANALISIS COMPARATIVO DE LOS SERVOSISTEMAS TIPOS D-1 y D-2

1. INTRODUCCION

En el análisis de los sistemas realimentados de control podemos distinguir dos aspectos de fundamental importancia: la existencia de un error en régimen permanente y la magnitud de dicho error. En los servosistemas con realimentación unitaria $(H(s) = 1)$ se deducen ambos aspectos de la función de transferencia en bucle abierto, estableciéndose su calificación, así como medios fáciles para clasificar los sistemas.

2. Respuesta en régimen permanente.- Error en régimen permanente.

Intuitivamente, el error en un sistema es la diferencia entre la variable gobernada y el valor de referencia, cuando el sistema ha alcanzado el régimen permanente.

Si la entrada $r(t)$ y la salida $c(t)$ tienen iguales dimensiones (una tensión gobernando a una tensión, una posición gobernando a una posición, etc) y están en igual nivel ó tienen la misma magnitud (sistemas con retorno unitario), la función de error es simplemente

$$e(t) = r(t) - c(t) \qquad (1)$$

Sin embargo, a veces no es posible o no conviene proporcionar una entrada al mismo nivel ó dimensión

que la variable gobernada. Por ejemplo, puede ser necesario usar una fuente de baja tensión para gobernar la salida de otra de alta tensión; en un servomecanismo de velocidad (integrador puro) puede usarse una fuente de tensión o una entrada de posición para gobernar la velocidad del árbol de salida.

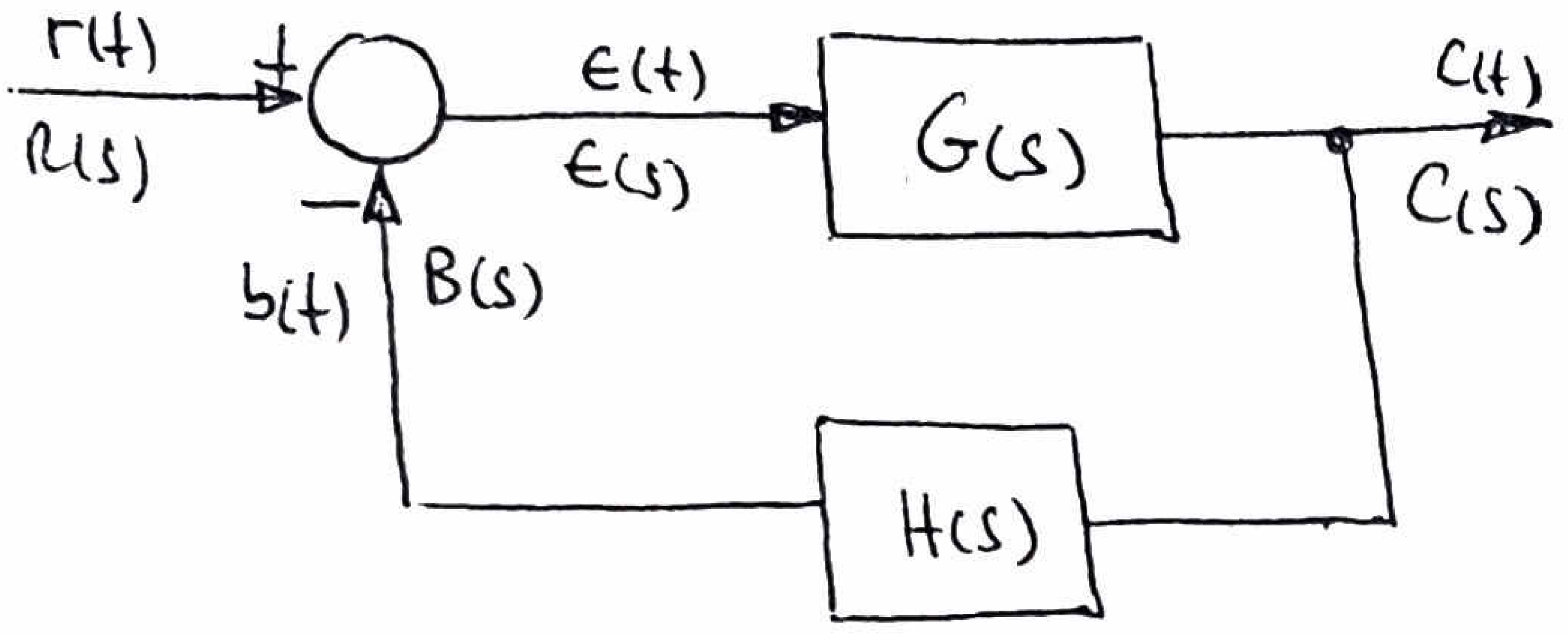


Fig. 1

Generalmente en estos casos incorporamos en la cadena de retorno un elemento no unitario, H y el error definido en (1) carece de sentido. En otras palabras, no podemos definir el error como la diferencia entre la entrada y la salida; las señales de entrada y de salida deben ser de la misma dimensión y estar en un mismo nivel antes de la sustracción. Para un sistema de retorno no unitario, medimos su error usando la señal de entrada ϵ (Ver fig 1) que es,

$$\epsilon(t) = r(t) - b(t) \qquad (2)$$

o usando la transformada de Laplace

$$\epsilon(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)\,C(s). \qquad (3)$$

Definimos el error en régimen permanente de un servosistema como el error (ó señal de error en general) una vez alcanzado el régimen permanente; o sea

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} e(t) \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{rp} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) \qquad (5)$$

Este error depende de la entrada al sistema y de la naturaleza y características del sistema. Como tenemos poca influencia sobre la señal de entrada del sistema de mando, podríamos reducir el error en régimen permanente aumentando la ganancia de la cadena directa ó variando las características del sistema, pero éste puede resultar menos estable ó incluso inestable.

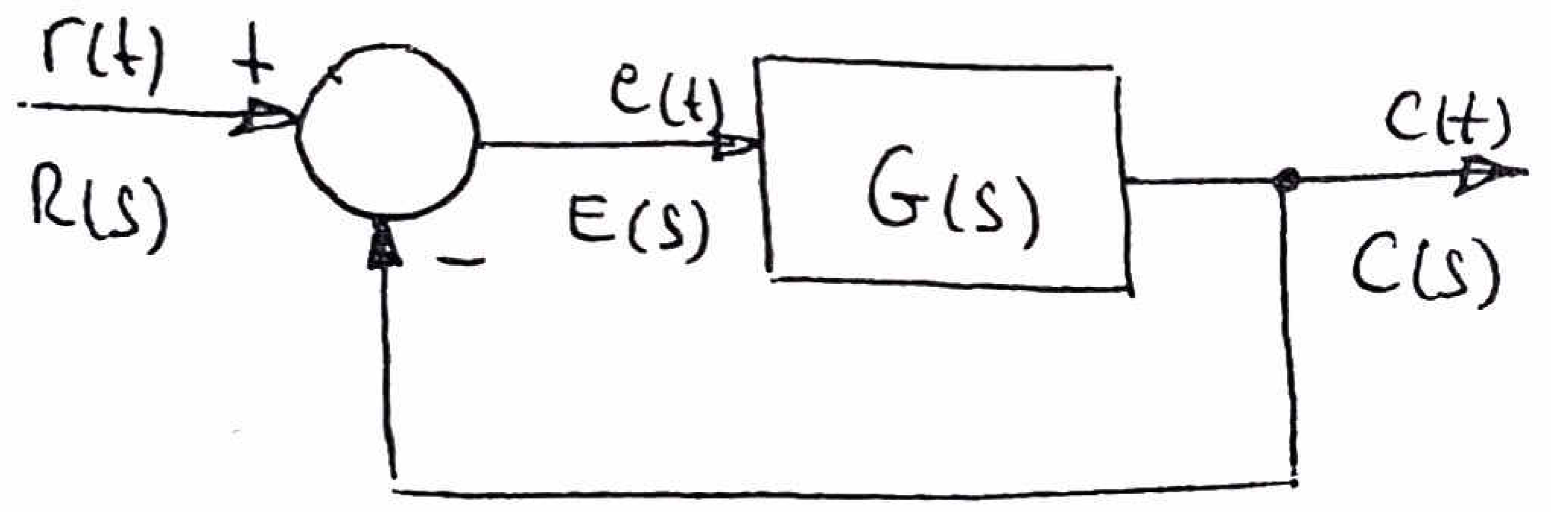


fig. 2

Para simplificar el problema nos referiremos a sistemas con retorno unitario, pero de ellos podremos extender conclusiones hacia sistemas con retorno no unitario.

Sea el servosistema de la fig 2. La función de error viene dada por:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \qquad (6)$$

Aplicando el teorema del valor final, podemos escribir el error en régimen permanente como

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\, E(s) \qquad (7)$$

Donde $sE(s)$ no debe tener polos situados sobre el eje imaginario ni en la región real positiva del plano s.

Sustituyendo la ecuación (6) en la (7), tenemos

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} \qquad (8)$$

que nos indica que el error en régimen permanente depende de la entrada $R(s)$ y de la función de transferencia $G(s)$ del sistema.

Simplificaremos el cálculo del error en régimen permanente, si establecemos algunas relaciones entre los tipos de entrada, los sistemas y los errores en régimen permanente. Consideraremos sólo tres tipos básicos de entrada de prueba (escalón, rampa y aceleración).

(1) Error en régimen permanente de sistemas con entrada en escalón de posición (K_p constante de error de posición).

Si la entrada del servosistema de la fig. 2 es una función en escalón de valor R, la transformada de Laplace de $r(t)$ es $R(s) = R/s$. Entonces la ecuación (8) se convierte en

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{1 + G(s)} = \frac{R}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} \qquad (9)$$

Si hacemos

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \qquad (10)$$

donde definimos K_p como constante de error de posición, podemos escribir la Ec.(9) como

5.

$$K_p = \frac{R - e_{rp}}{e_{rp}} \qquad (11)$$

ó

$$K_p = \frac{\text{Salida deseada} - e_{rp}\ \text{admisible}}{\text{Error admisible en reg. perm.}} \qquad (12)$$

La ecuación (12) indica que, siempre que especifiquemos para un servosistema la respuesta posicional de salida deseada y su error admisible en régimen permanente, la K_p correspondiente del sistema queda determinada; usando la Ec (10) fijamos el comportamiento deseado de $G(s)$ para $s = 0$.

(2) Error en régimen permanente de sistemas con entrada en escalón de velocidad (K_v constante de error de velocidad).

Si la entrada del servosistema de la fig. 2 es

$$r(t) = R\,t\,u(t) \qquad (13)$$

donde R viene dado en desplazamiento/sg, la transformada de $r(t)$ es $R(s) = R/s^2$. Sustituyendo $R(s)$ en la Ec (8), tenemos

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{s + s\,G(s)} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} s\,G(s)} \qquad (14)$$

Si hacemos

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \text{constante de error de velocidad} \qquad (15)$$

la ecuación (14) resulta

$$e_{rp} = R/K_v \qquad (16)$$

ó

$$K_v = \frac{R}{e_{rp}} = \frac{\text{veloc. de salida deseada}}{\text{error en régimen perma.}} \ (sg^{-1}) \qquad (16)$$

El error en régimen permanente representado en la ec. (15) se llama generalmente error de velocidad. Hay que tener en cuenta que el error de velocidad no es un error en velocidad; por el contrario, es el error en desplazamiento, debido a una entrada tipo rampa, $r(t) = Rt\,u(t)$. La fig. 3. aclara mas este punto, representando una entrada en rampa ~~críti~~ típica con la salida retrasada respecto a ella debido a un error en desplazamiento, una vez alcanzado el régimen permanente.

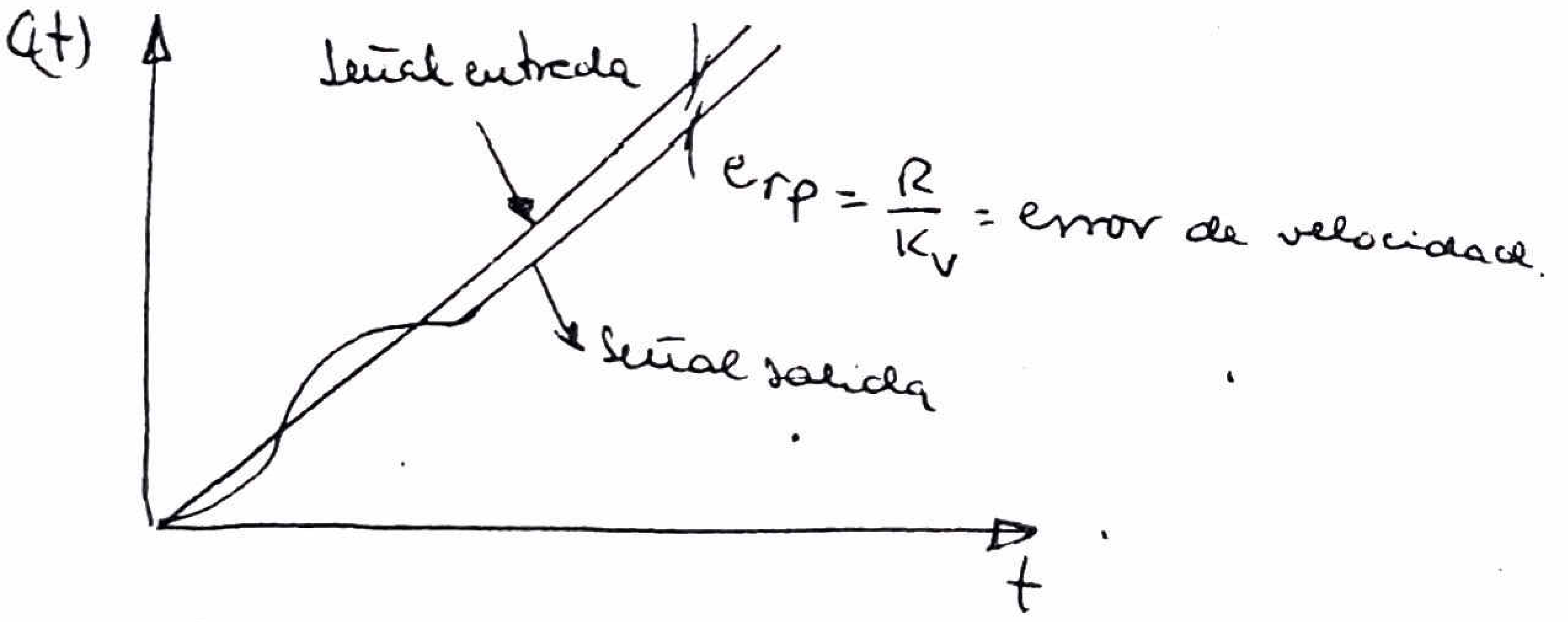


fig. 3

(3) Error en régimen permanente de sistemas con entrada en aceleración (Ka constante de error de aceleración).

Si aplicamos una entrada en aceleración $r(t) = Rt^2 u(t)$ al sistema de la fig 2, la transformada de Laplace de $r(t)$ es $R(s) = R/s^3$, donde R viene dada en desplazamientos/sg²; entonces la Ec.(8) se convierte en

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)} = \frac{R}{K_a} \qquad (17)$$

donde

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \text{constante de error de aceleración} \qquad (18)$$

ó

$$K_a = \frac{R}{e_{rp}} = \frac{\text{aceleración de salida deseada}}{\text{error en régimen perman.}} \quad (sg^{-2}) \qquad (19)$$

Como en los dos casos anteriores, el error en régimen permanente dado por la Ec. (17) se llama error de aceleración y es el error en desplazamiento debido a una entrada de tipo aceleración. La fig 4 muestra un error de aceleración típico en la respuesta de salida en régimen permanente, al ser la entrada de tipo aceleración.

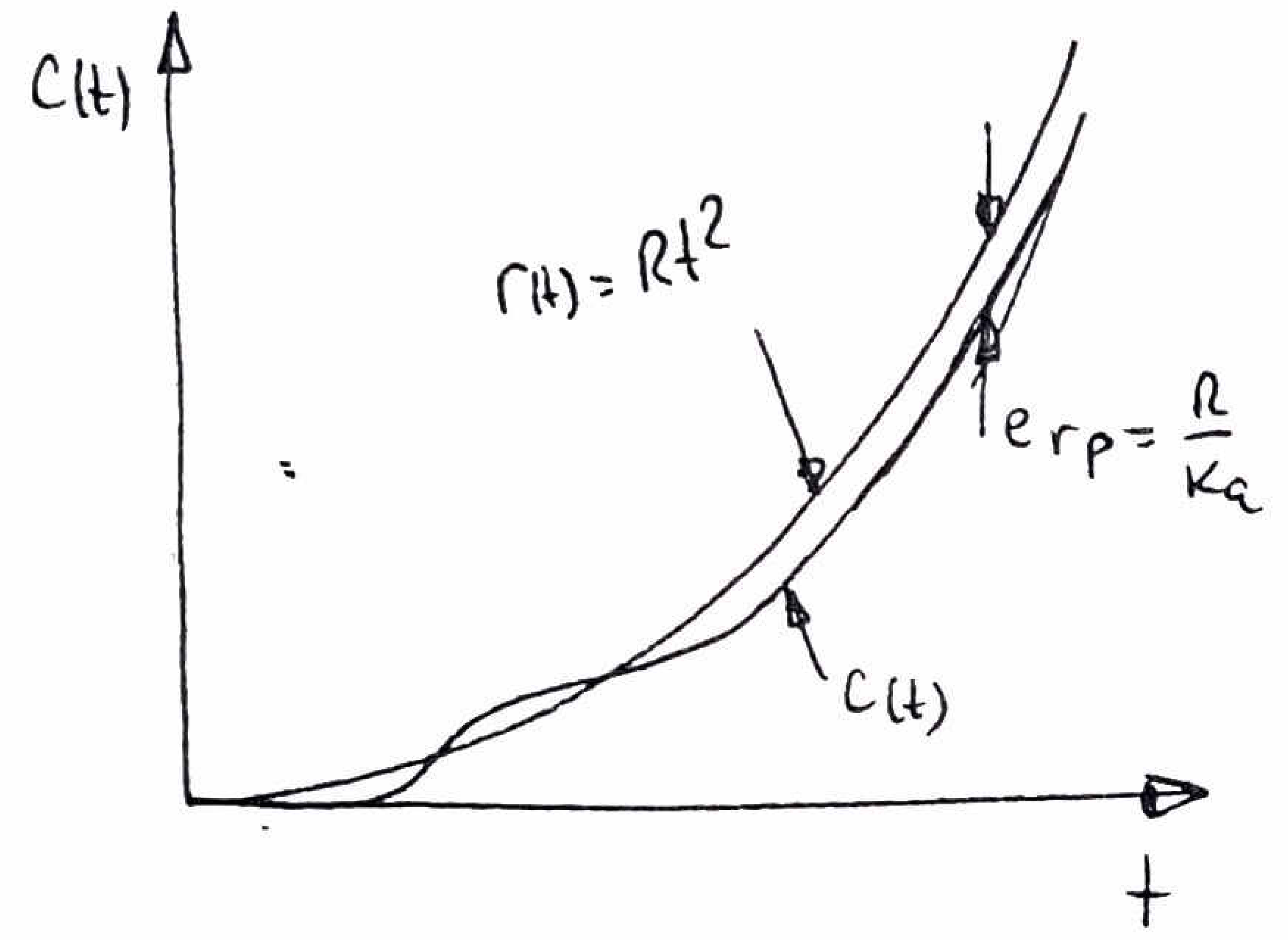


fig. 4

De todo lo anterior se desprende que cuando la entrada de un servosistema con retorno unitario es del tipo escalón de posición, rampa ó aceleración, el error en régimen permanente debido a cada entrada depende de las constantes de error K_p K_v y K_a, respectivamente. Definimos las constantes de error como sigue:

(1) Constante de error de posición $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$ (20)

(2) " " " " velocidad $K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$ (21)

(3) " " " " aceleración $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$ (22)

8.

Clasificación de G(s).

Evidentemente, el valor de las constantes de error de un sistema dado con retorno unitario depende de G(s). Para clasificar la función de transferencia en cadena abierta G(s) podemos escribir

$$G(s) = \frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots(1+T_m s)}{s^j(1+T_a s)(1+T_b s)\cdots(1+T_n s)} \qquad (23)$$

donde K es la ganancia de la cadena directa y los T son constantes del sistema. Para determinar el tipo de sistema pueden usarse los polos en el origen, s^j, donde $j=0,1,2$. puesto que de las ecuaciones (20) a (22) se deduce que el comportamiento de G(s) para $s=0$ determina las constantes de error y, para $s=0$, G(s) tiende a K/s^j.

Así, un sistema de tipo 1 es aquel para el cual $j=1$ y en un sistema de tipo 2, $j=2$.

Teniendo en cuenta esto último podemos establecer el siguiente cuadro comparativo de los dos sistemas, 1 y 2, estudiando su comportamiento ante diversas entradas.

Tipo de sistema	K_p	K_v	K_a	ENTRADA EN ESCALON DE POSICION $e_{rp} = \frac{R}{1+K_p}$	ENTRADA EN VELOCIDAD $e_{rp} = \frac{R}{K_v}$	ENTRADA EN ACEL. $e_{rp} = \frac{R}{K_a}$
1	∞	K	0	$e_{rp}=0$	$e_{rp} = \frac{R}{K}$	$e_{rp} = \infty$
2	∞	∞	K	$e_{rp}=0$	$e_{rp}=0$	$e_{rp} = \frac{R}{K}$

Un error en régimen permanente de valor infinito significa que el error crece con el tiempo

Un inconveniente de las constantes de error definidas es que solo una de ellas tiene un valor finito distinto de cero para un sistema determinado. Otro inconveniente es que, en el caso de que el error en régimen permanente sea una función del tiempo, las constantes de error dan solamente una respuesta infinita sin ~~especificar~~ especificar como varia con el tiempo.

- Diagramas logarítmico y polar de los servosistemas tipos 1 y 2.-

Los dos tipos tienen la función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{K_1}{s^i(1+sT_a)}$$

donde $i=1$ para el sistema 1 y $i=2$ para el sistema 2.

La representación logarítmica para el tipo 1 viene indicada en la fig 5.

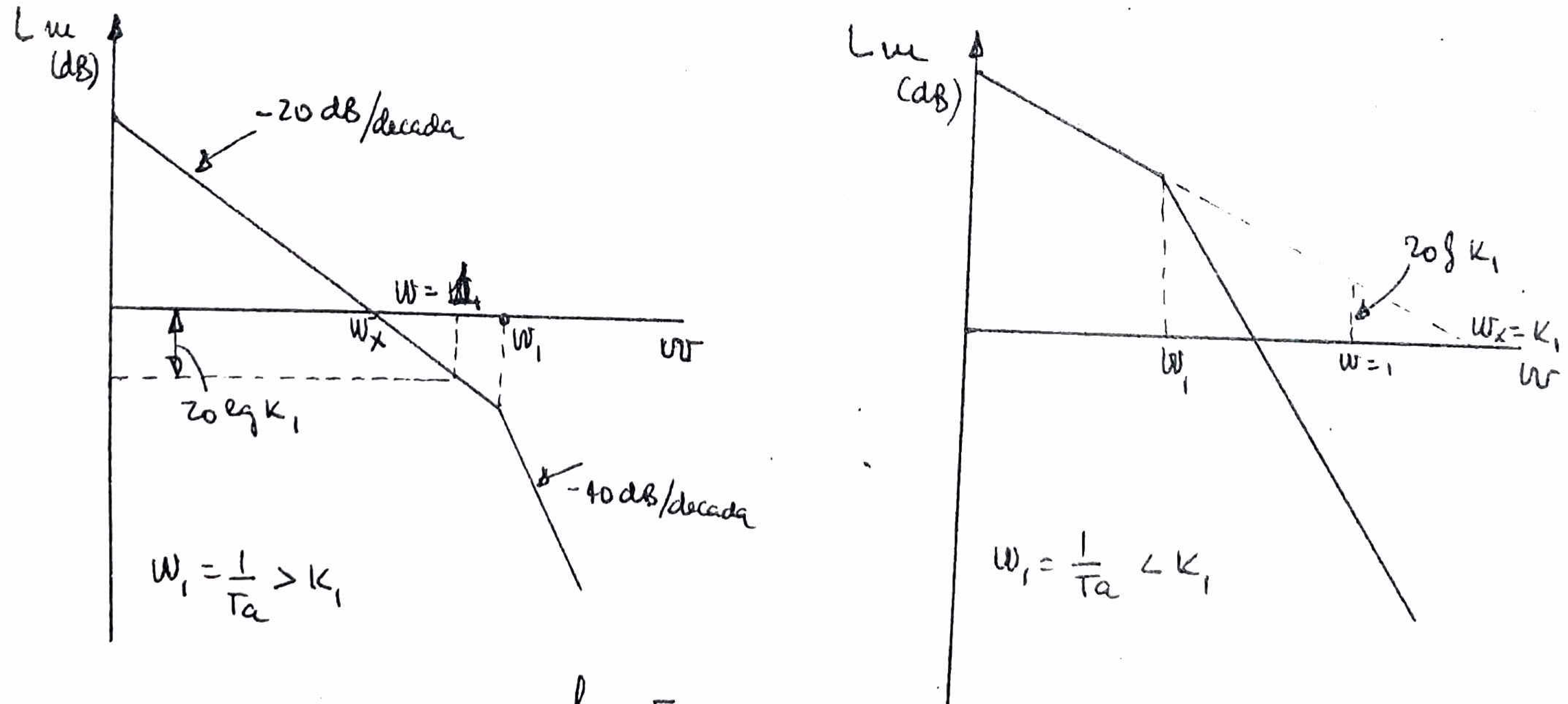


fig. 5

10

Las características de un sistema tipo 1 son:

(1). La pendiente en bajas frecuencias es −20 dB/decada

(2) La intersección de la pendiente en bajas frecuencias (o su prolongación) con el eje 0 dB tiene lugar a una frecuencia tal que $\omega_x = K_1$

(3) El valor de la línea en las bajas frecuencias (o su prolongación) para $\omega = 1$ vale $20 \lg K_1$.

(4) La ganancia K_1 es el coeficiente estático del error.

Para el sistema tipo 2, su representación logarítmica viene dada en la fig 6.

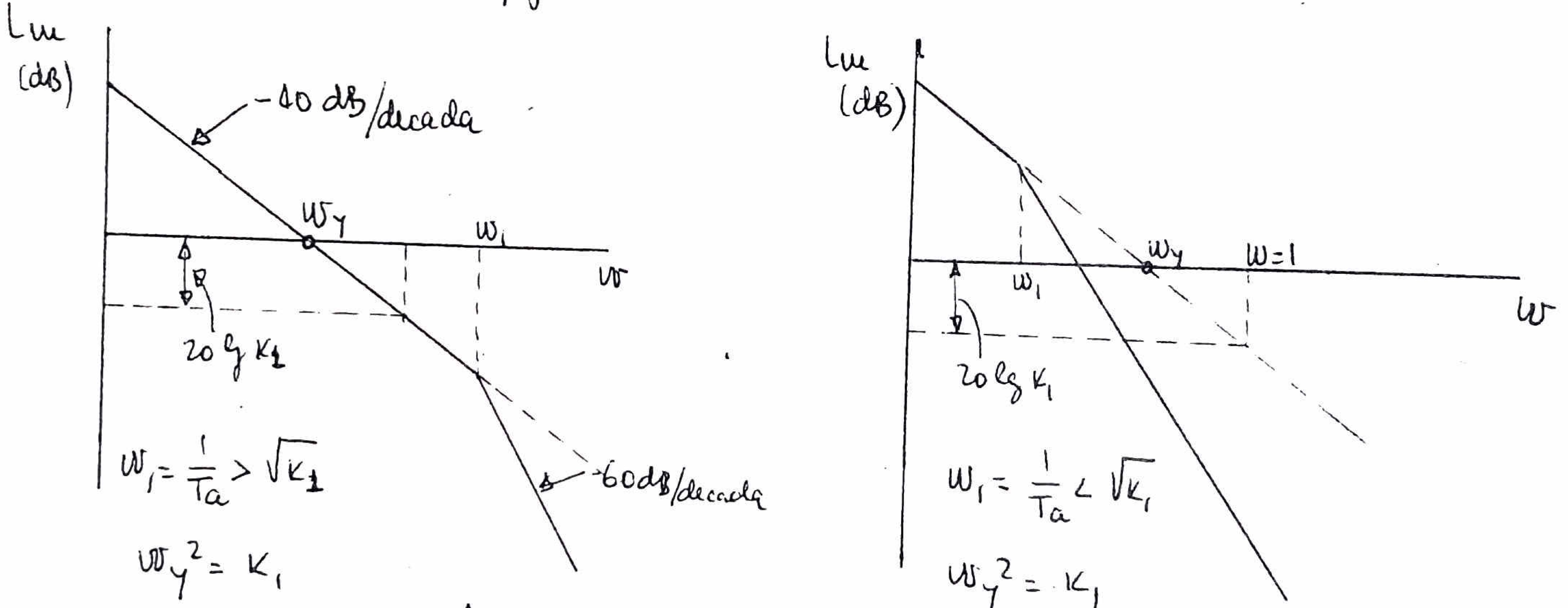


fig 6

Las características de un sistema de tipo 2 son:

(1) La pendiente en bajas frecuencias es −40 dB/decada

(2) La intersección de la pendiente de bajas frecuencias de −40 dB/década ó su prolongación con el eje 0 dB tiene lugar a una frecuencia ω_y tal que $\omega_y^2 = K_1$

(3) La ordenada de la asíntota de bajas frecuencias (de −40 dB/década) a la frecuencia $\omega = 1$ vale $20 \lg K_1$.

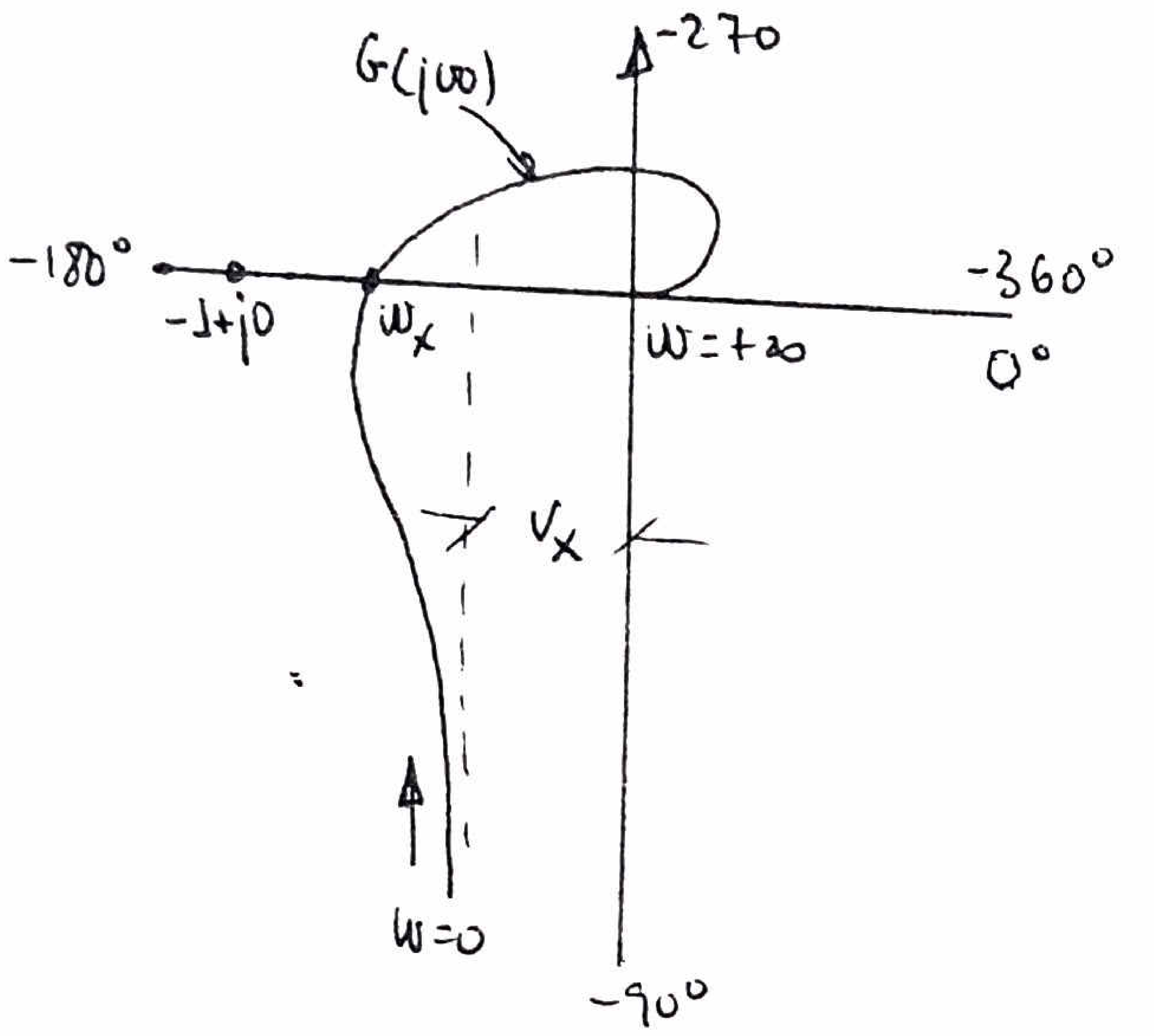
(4) La ganancia K_1 es el coeficiente estático de error a la parábola.

11.

El diagrama polar directo de un sistema tipo 1 cuya función es:

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_c)(1+j\omega T_q)}$$

viene dado por la fig. 7.



$$V_x = -K_1\,(T_q + T_c + T_m)$$

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_cT_q + T_cT_m + T_qT_m}}$$

fig. 7

y el del tipo 2 dado por:

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_m)}$$

viene dado por la fig. 8

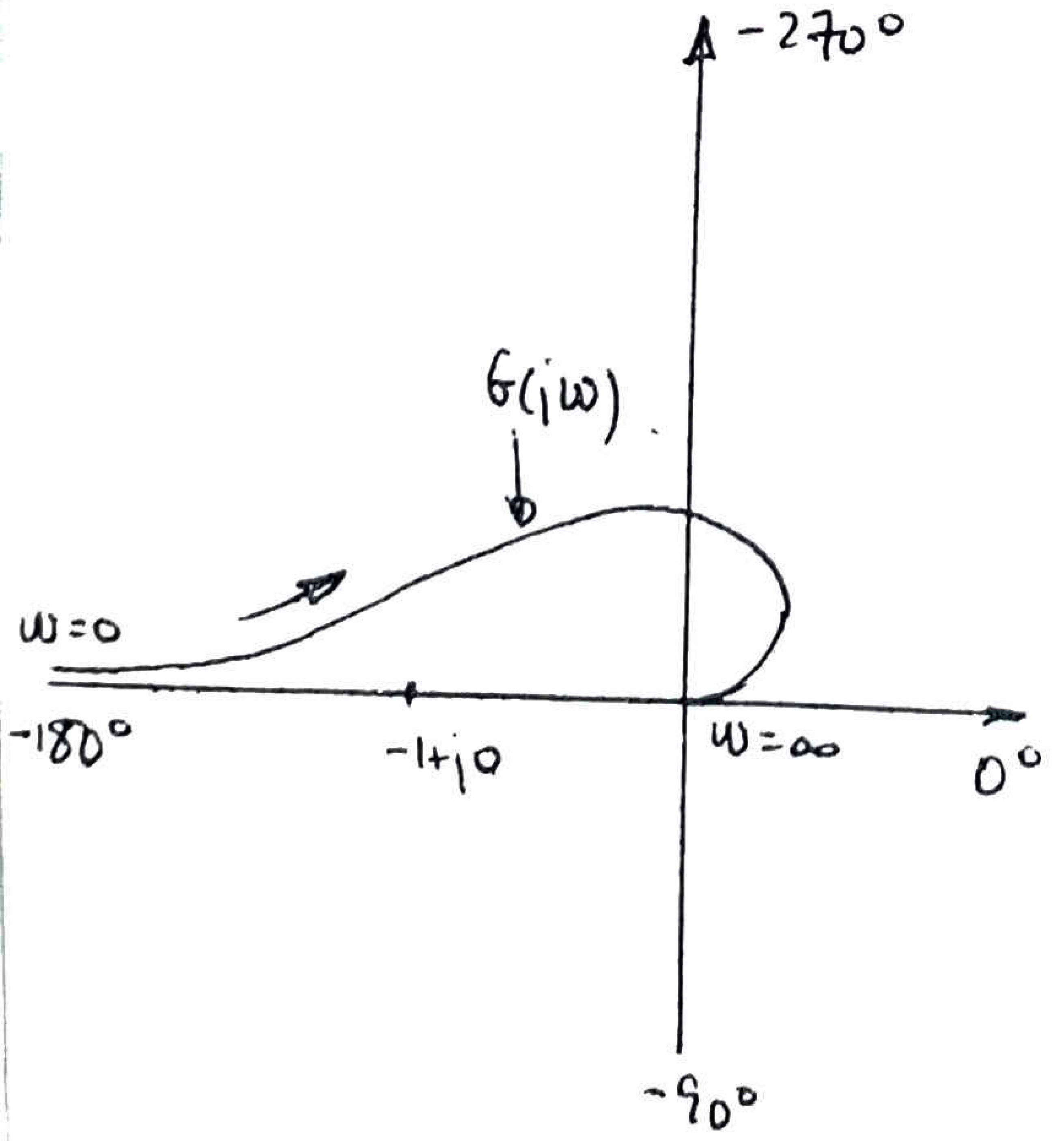


fig. 8